

24 Topologie : Continuité compacité et dimension finie

24.A Questions de cours :

1. Soit A une partie de E , montrer que $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Caractérisation de la continuité des applications linéaires
3. Démontrer la caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts.
4. L'image continue d'un compact est compacte

24.B Exercices continuité :

Exercice 1: *

Montrer que la distance d'un élément $x \in E$ à A est nulle si et seulement si $x \in \bar{A}$.

Exercice 2: *** Sous-groupes de \mathbb{R}

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans \mathbb{R} .
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
On admettra que pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3: ***

On pose $A = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = U$, l'ensemble des nombres de module 1.

Exercice 4: ** Deux topologies violemment différentes / deux normes violemment non équivalentes

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
3. En déduire que les normes ne sont pas équivalentes

Exercice 5: *** Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{C} , et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans \mathbb{R} .

Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6: ** Densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui associe à une matrice le maximum des sommes des valeurs absolues des éléments de chaque ligne de la matrice. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7: ****

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evndf, soit F une partie fermée de E et $f : F \rightarrow F$ une application contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Montrer que le résultat précédent reste valable même si on a seulement f^p est contractante pour un entier naturel p .

Exercice 8: **

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que \overline{V} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Application 1 : soit H un hyperplan de E . Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E .
4. Application 2 : soit A une partie de E . Démontrer que $\text{vect}(\overline{A}) \subset \overline{\text{vect}(A)}$.

Exercice 9: **

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On le muni de la norme infinie.

On considère l'endomorphisme :

$$T \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto \left(Tf : x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right) \end{cases}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continue de E .
2. Est-il injectif? surjectif?

24.C Exercices compacité :

Exercice 10: **** groupes orthogonal / spécial orthogonal

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (mais n'est pas connexe par arcs).
2. Montrer que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (et connexe par arcs). En déduire que $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la composante connexe par arcs de l'identité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11: **

Soit E un evn.

1. La somme de deux fermés de E est-elle nécessairement fermée?
2. Montrer que la somme d'un compact et d'un fermé est fermée
3. Montrer que la somme de deux compacts est compacte.

Exercice 12: ***

Soit E un espace vectoriel normé. Soit F et G deux fermés non vides disjoints de E . Montrer qu'il existe une application continue f de E dans \mathbb{R} telle que $f_F = 0$ et $f_G = 1$.

Cette propriété est-elle vraie pour deux ouverts non vides disjoints?

Exercice 13: *****

Soit f une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q telle que, pour toute partie A compacte (resp. connexe par arcs), $f(A)$ est compact (resp. connexe par arcs). Montrer que f est continue.